

An Atlas of Matrices

Examples suitable for working by hand

Dave Bayer

© 2006, 2007 by Dave Bayer
All rights reserved

Projective Press
New York, NY USA

<http://projectivepress.com/LinearAlgebra>

Dave Bayer
Department of Mathematics
Barnard College
Columbia University
New York, New York

Draft of December 25, 2006

Contents

Contents	i
Preface	iii
1 Functions of matrices	1
1.1 2×2 matrices with distinct eigenvalues	1
1.2 2×2 singular matrices	12
1.3 2×2 symmetric matrices	23
1.4 2×2 matrices with a repeated eigenvalue	34
1.5 3×3 matrices with distinct eigenvalues	45
1.6 3×3 singular matrices	57
1.7 3×3 symmetric matrices	69

Preface

This is an early draft of examples in Linear Algebra, to accompany the text *Linear Algebra*. I am making these drafts available in incomplete form for the benefit of my linear algebra students at Barnard College and Columbia University.

This is a draft of December 25, 2006. The most recent drafts of these texts may be downloaded from:

<http://projectivepress.com/LinearAlgebra>

Chapter 1

Functions of matrices

1.1 2×2 matrices with distinct eigenvalues

For each matrix below, the second form can be used to compute functions of matrices, such as the matrix exponential. For example, if

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 5$$

then

$$\begin{aligned} A &= -1 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} / 5 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 5 \\ A^n &= (-1)^n \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} / 5 + 4^n \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 5 \\ e^{At} &= e^{-t} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} / 5 + e^{4t} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

The following 2×2 matrices have nonzero integer entries, are nonsingular, have distinct integer eigenvalues, and are not symmetric:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} / 4 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} / 5 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 3 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} / 5 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} / 4 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} / 3 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} / 5 + 1 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} / 7 + 4 \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} / 3 + 2 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} / 5 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} / 7 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} / 2 + 1 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} / 4 + 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} / 3 + 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 3 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} / 7 + 5 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} / 4 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} / 7 + 5 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} / 7 + 6 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} / 8 + 4 \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} / 7 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} / 5 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} / 4 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 3 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} / 8 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} / 7 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 3 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} / 5 + 6 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} / 4 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} / 3 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} / 7 + 6 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} / 8 + 5 \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} / 5 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} / 3 + 2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} / 8 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} / 7 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} / 3 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} / 4 + 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} / 7 + 5 \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} / 5 + 6 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} / 4 + 6 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} / 8 + 3 \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} / 7 + 3 \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= 1 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} / 3 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} / 2 + 1 \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} / 3 - 1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -6 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} / 7 + 1 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} / 9 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} / 9 + 5 \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} / 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 3 - 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} / 3 + 1 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} / 5 + 3 \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} / 7 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} / 5 + 3 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} / 4 - 1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 3 + 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 9 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} / 9 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} / 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} / 3 + 1 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} / 8 + 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -6 \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} / 7 + 1 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} / 2 + 4 \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} / 2 + 4 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} / 8 + 7 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} / 6 + 2 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} / 7 + 3 \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} / 7 + 6 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} / 8 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} / 8 + 6 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 9 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} / 9 + 6 \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} / 5 + 6 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} / 6 + 3 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} / 7 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} / 8 + 7 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} / 9 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} / 9 + 6 \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} / 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 9 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} / 9 + 7 \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} / 6 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} / 7 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} / 8 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -6 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} / 8 + 2 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} / 9 \\ &= -6 \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} / 9 + 3 \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} / 9 \end{aligned}$$

1.2 2×2 singular matrices

For each matrix below, the second form can be used to compute functions of matrices, such as the matrix exponential. For example, if

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3$$

then

$$\begin{aligned} A &= 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} / 3 + 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ A^n &= 0^n \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} / 3 + 3^n \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ e^{At} &= e^{0t} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} / 3 + e^{3t} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

The following 2×2 matrices have nonzero integer entries, are singular, have distinct integer eigenvalues, and are not symmetric:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 3 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} / 3 + 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} / 4 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} / 5 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} / 2 + 2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} / 4 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} / 5 + 5 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} / 5 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} / 4 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 3 + 6 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} / 3 + 3 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} / 3 + 3 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} / 7 + 7 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} / 4 + 0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 5 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} / 3 + 6 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} / 7 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} / 7 + 7 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} / 2 + 2 \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} / 4 + 0 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} / 5 + 0 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} / 2 + 0 \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} / 4 + 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} / 5 + 0 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} / 2 + 0 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 6 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} / 6 + 6 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} / 7 + 7 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} / 4 + 4 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 8 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} / 8 + 8 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} / 3 + 3 \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 9 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} / 9 + 9 \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} / 2 + 2 \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} / 6 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} / 6 + 6 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} / 7 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} / 7 + 7 \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} / 8 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} / 8 + 8 \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} / 9 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} / 9 + 9 \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} / 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} / 3 + 3 \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 0 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -7 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} / 7 + 0 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= -2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= -1 \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} / 5 + 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -6 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -7 \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} / 7 + 0 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -1 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 7 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} / 7 + 7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} / 7 + 7 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} / 8 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} / 8 + 8 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} / 5 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} / 4 + 8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} / 5 + 5 \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} / 5 + 5 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} / 5 + 5 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} / 5 + 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 7 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} / 7 + 7 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 3 + 9 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} / 4 + 4 \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} / 4 + 4 \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} / 5 + 0 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} / 2 + 4 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} / 7 + 7 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} / 5 + 10 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} / 5 + 0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -7 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} / 7 + 0 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 11 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} / 11 + 11 \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} / 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 7 \\ &= -7 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} / 7 + 0 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= -1 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 7 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} / 7 + 7 \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 8 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} / 8 + 8 \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

1.3 2×2 symmetric matrices

For each matrix below, the second form can be used to compute functions of matrices, such as the matrix exponential. For example, if

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2$$

then

$$\begin{aligned} A &= 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ A^n &= 1^n \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 3^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ e^{At} &= e^t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

The following 2×2 matrices have nonzero integer entries, are nonsingular, have distinct integer eigenvalues, and are symmetric:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 3 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 5 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 6 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 5 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 - 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 5 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -7 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 6 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 5 + 6 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 7 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\
&= -3 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 5 + 7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 5 \\
\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
&= -6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
&= -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
&= -7 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
&= -1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 9 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} / 10 \\
&= -4 \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} / 10 + 6 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} / 10 \\
\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
&= -8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
&= 4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 6 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\
&= 1 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 6 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 7 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 10 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} / 10 + 6 \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 7 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 9 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -6 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 4 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 10 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} / 10 + 5 \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 - 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} / 10 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} / 10 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} / 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -7 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 - 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -6 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 5 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -9 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 7 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 13 \\ &= -8 \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} / 13 + 5 \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} / 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} / 13 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} / 13 + 10 \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} / 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 13 \\ &= -7 \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} / 13 + 6 \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} / 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -7 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} / 13 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} / 13 + 8 \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} / 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 5 + 7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 9 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 13 \\ &= -6 \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} / 13 + 7 \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} / 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} / 10 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} / 10 + 7 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} / 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} / 13 \\ &= -6 \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} / 13 + 7 \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} / 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 13 \\ &= -5 \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} / 13 + 8 \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} / 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 10 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} / 13 \\ &= -7 \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} / 13 + 6 \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} / 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -9 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -6 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 5 + 9 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 11 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -7 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 8 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} / 13 \\ &= -8 \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} / 13 + 5 \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} / 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -7 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 5 + 8 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -10 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 7 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 7 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 10 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} / 10 + 7 \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 9 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 10 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 11 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} / 13 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} / 13 + 10 \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} / 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -6 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 9 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\
&= -7 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 3 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\
\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 10 \\
&= -6 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} / 10 + 4 \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} / 10 \\
\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\
&= -6 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} / 5 - 1 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\
\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\
&= -8 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} / 5 + 7 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} / 5 \\
\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
&= -6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 - 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} / 5 \\
&= -6 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} / 5 - 1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} / 5 \\
\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\
&= -7 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 - 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} / 2
\end{aligned}$$

1.4 2×2 matrices with a repeated eigenvalue

For each matrix below, the second form can be used to compute functions of matrices, such as the matrix exponential. For example, if

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

then

$$\begin{aligned} A &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ A^n &= 2^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + n 2^{n-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ e^{At} &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t e^{2t} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

The following 2×2 matrices have entries in $[-4, 4]$, and have a repeated integer eigenvalue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 2 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} / 6 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} / 6 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} / 8 \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} / 8 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} / 8 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} / 6 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} / 8 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} / 7 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 5 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} / 7 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} / 4 \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} / 8 \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} / 9 \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} / 9 \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} / 5 \\ &= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} / 9 \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} / 3 \\ &= 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} / 9 \\ &= 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} / 9 \\ &= 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} / 6 \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} / 9 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} / 9 \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.5 3×3 matrices with distinct eigenvalues

The following 3×3 matrices have nonzero integer entries, are nonsingular, have distinct integer eigenvalues, and are not symmetric:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -8 & -4 & 4 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} /16 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} /16 + 1 \begin{bmatrix} 16 & 8 & -8 \\ -8 & -4 & 4 \\ -8 & -4 & 4 \end{bmatrix} /16 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 6 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} /16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & -3 & 9 \end{bmatrix} /12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -4 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 9 \end{bmatrix} /12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -5 & -5 & 5 \\ 9 & -3 & 21 \end{bmatrix} /30 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 6 & -12 & -6 \\ -10 & 20 & 10 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix} /30 + 1 \begin{bmatrix} 15 & 15 & -15 \\ 10 & 10 & -10 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} /30 + 3 \begin{bmatrix} 9 & -3 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 21 \end{bmatrix} /30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix} /12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -3 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 3 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 5 & -5 & 5 \\ 9 & 21 & -3 \end{bmatrix} /30 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 6 & -6 & -12 \\ -4 & 4 & 8 \\ -10 & 10 & 20 \end{bmatrix} /30 + 1 \begin{bmatrix} 15 & -15 & 15 \\ -5 & 5 & -5 \\ 10 & -10 & 10 \end{bmatrix} /30 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 21 & -3 \\ 9 & 21 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /8 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} /8 - 1 \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /8 + 3 \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -8 & 4 & -4 \\ 8 & 6 & 10 \end{bmatrix} /16 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 8 & -8 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} /16 + 1 \begin{bmatrix} 16 & -8 & 8 \\ -8 & 4 & -4 \\ -8 & 4 & -4 \end{bmatrix} /16 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 10 \\ 8 & 6 & 10 \end{bmatrix} /16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & -8 & 4 \\ 10 & 8 & 6 \end{bmatrix} /16 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 \\ -8 & 0 & 8 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} /16 + 1 \begin{bmatrix} -4 & -8 & 4 \\ 8 & 16 & -8 \\ -4 & -8 & 4 \end{bmatrix} /16 + 3 \begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 6 \end{bmatrix} /16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & -4 & -3 \\ -5 & 4 & 3 \\ -5 & 4 & 3 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix} /12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 8 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} /16 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 10 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & 8 & 6 \end{bmatrix} /16 + 1 \begin{bmatrix} -4 & 8 & -4 \\ -8 & 16 & -8 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} /16 + 3 \begin{bmatrix} 10 & 0 & 10 \\ 8 & 0 & 8 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix} /16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & -12 & 4 \\ 9 & 12 & 3 \end{bmatrix} /12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 7 & 0 & -7 \\ -4 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} -4 & -12 & 4 \\ 4 & 12 & -4 \\ -4 & -12 & 4 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 12 & 3 \end{bmatrix} /12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -12 & 12 & -12 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 12 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 10 & 4 \\ -15 & -10 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /30 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 6 & -10 & -4 \\ -12 & 20 & 8 \\ -6 & 10 & 4 \end{bmatrix} /30 + 1 \begin{bmatrix} 15 & 10 & -5 \\ 15 & 10 & -5 \\ -15 & -10 & 5 \end{bmatrix} /30 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & -3 \\ 21 & 0 & 21 \end{bmatrix} /30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} /4 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} /4 + 1 \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} /4 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} /4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & -15 & 5 \\ 12 & 8 & 8 \end{bmatrix} /20 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 8 & -8 & -8 \\ -5 & 5 & 5 \\ -7 & 7 & 7 \end{bmatrix} /20 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & -5 \\ -5 & -15 & 5 \end{bmatrix} /20 + 3 \begin{bmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 8 \end{bmatrix} /20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} /3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} /3 + 2 \begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -6 & 2 \end{bmatrix} /3 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} /3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} /15 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 6 & 2 & -10 \\ -3 & -1 & 5 \\ -6 & -2 & 10 \end{bmatrix} /15 + 1 \begin{bmatrix} 0 & -20 & 10 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & -10 & 5 \end{bmatrix} /15 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 18 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \end{bmatrix} /15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -15 & -10 & 5 \\ 15 & 12 & 9 \end{bmatrix} /30 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 0 & -20 & 10 \\ 0 & 28 & -14 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} /30 + 1 \begin{bmatrix} 30 & 20 & -10 \\ -15 & -10 & 5 \\ -30 & -20 & 10 \end{bmatrix} /30 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 15 & 12 & 9 \\ 30 & 24 & 18 \end{bmatrix} /30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -8 & 10 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} /16 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 6 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -8 & 10 \end{bmatrix} /16 + 1 \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -8 & 16 & -8 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix} /16 + 3 \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 8 \\ 10 & 0 & 10 \end{bmatrix} /16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \\ 6 & -8 & 10 \end{bmatrix} /16 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -8 & 0 & 8 \\ -10 & 0 & 10 \end{bmatrix} /16 + 1 \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 8 & 16 & -8 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix} /16 + 3 \begin{bmatrix} 6 & -8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & 10 \end{bmatrix} /16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -4 & 7 \\ -4 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 7 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -12 & 12 & -12 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 12 & 0 & 12 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix} /12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & -4 \\ 3 & -12 & 9 \end{bmatrix} /12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ -4 & 0 & 4 \\ -7 & 0 & 7 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 12 & -4 \\ 4 & 12 & -4 \\ 4 & 12 & -4 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 3 & -12 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -12 & 9 \end{bmatrix} /12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & -4 \\ -3 & 3 & 9 \end{bmatrix} /12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -5 & 5 & -5 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 8 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 9 \\ -3 & 3 & 9 \end{bmatrix} /12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -10 & 6 \\ -8 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} /16 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 10 & -6 \\ 8 & -10 & 6 \end{bmatrix} /16 + 1 \begin{bmatrix} 16 & -8 & -8 \\ 8 & -4 & -4 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} /16 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} /16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} / 12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -4 & 5 & -3 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix} / 12 + 2 \begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{bmatrix} / 12 + 3 \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} / 12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -4 & 3 & -5 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} / 12 + 2 \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} / 12 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -8 & -4 & 4 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix} / 12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -3 & 3 & -3 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} / 12 + 2 \begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 4 \end{bmatrix} / 12 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -9 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} / 6 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 3 \\ -9 & 3 & 3 \end{bmatrix} / 6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 8 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} / 6 + 1 \begin{bmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} / 6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} / 6 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} / 6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & -4 & -8 \\ 2 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ -8 & -4 & 4 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} /8 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix} /8 + 1 \begin{bmatrix} 8 & -8 & -8 \\ 4 & -4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} /8 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} /8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -8 & 7 \\ -5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} /20 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 5 & -8 & 7 \\ -5 & 8 & -7 \\ 5 & -8 & 7 \end{bmatrix} /20 + 2 \begin{bmatrix} 15 & 0 & -15 \\ 5 & 0 & -5 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix} /20 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 0 & 12 & 12 \\ 0 & 8 & 8 \end{bmatrix} /20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix} /12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & -5 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} 4 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 8 \end{bmatrix} /12 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -5 & 5 & 5 \\ 9 & 21 & 3 \end{bmatrix} /30 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 6 & -6 & 12 \\ -4 & 4 & -8 \\ 10 & -10 & 20 \end{bmatrix} /30 + 1 \begin{bmatrix} 15 & -15 & -15 \\ -5 & 5 & 5 \\ -10 & 10 & 10 \end{bmatrix} /30 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 21 & 3 \\ 9 & 21 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -6 & 10 \\ -8 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} /16 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & -10 \\ 8 & -6 & 10 \end{bmatrix} /16 + 1 \begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 4 \\ -8 & -4 & -4 \end{bmatrix} /16 + 3 \begin{bmatrix} 0 & -8 & -8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} /16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} / 12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -5 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 4 \end{bmatrix} / 12 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix} / 12 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 9 & 9 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 & 10 \\ 15 & -5 & 10 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} / 30 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 6 & -4 & -10 \\ -6 & 4 & 10 \\ -12 & 8 & 20 \end{bmatrix} / 30 + 1 \begin{bmatrix} 15 & -5 & 10 \\ -15 & 5 & -10 \\ 15 & -5 & 10 \end{bmatrix} / 30 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 9 & 0 \\ 21 & 21 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} / 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 6 & 8 \\ -4 & -4 & 8 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} / 16 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 10 & -6 & -8 \\ -10 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 16 + 1 \begin{bmatrix} -4 & -4 & 8 \\ 4 & 4 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} / 16 + 3 \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} / 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 5 & 4 \\ -4 & -4 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} / 12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 7 & -5 & -4 \\ -7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 12 + 2 \begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -12 & -12 & 12 \end{bmatrix} / 12 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 12 & 12 & 0 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 10 & -8 \\ -4 & -4 & 8 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} / 16 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 6 & -10 & 8 \\ -6 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 16 + 1 \begin{bmatrix} 4 & 4 & -8 \\ -4 & -4 & 8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} / 16 + 3 \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} / 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 7 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} / 12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & -7 & 4 \\ -5 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 12 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ -12 & -12 & 12 \end{bmatrix} / 12 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 9 & 9 & 0 \\ 12 & 12 & 0 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 8 \\ 10 & 6 & 8 \end{bmatrix} / 16 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \end{bmatrix} / 16 + 1 \begin{bmatrix} -4 & 4 & -8 \\ -4 & 4 & -8 \\ 8 & -8 & 16 \end{bmatrix} / 16 + 3 \begin{bmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 10 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -7 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 12 \\ 9 & 3 & 12 \end{bmatrix} / 12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 7 & -7 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} / 12 + 2 \begin{bmatrix} -4 & 4 & -12 \\ -4 & 4 & -12 \\ 4 & -4 & 12 \end{bmatrix} / 12 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 3 & 12 \\ 9 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} / 4 + 1 \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} / 4 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} / 3 + 2 \begin{bmatrix} -2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} / 3 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & 15 \\ 12 & 8 & 8 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 8 & -8 & -8 \\ -7 & 7 & 7 \\ -5 & 5 & 5 \end{bmatrix} / 20 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -15 \\ 5 & -5 & 15 \end{bmatrix} / 20 + 3 \begin{bmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 12 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 8 \\ 6 & 10 & -8 \end{bmatrix} / 16 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \end{bmatrix} / 16 + 1 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \\ 8 & -8 & 16 \end{bmatrix} / 16 + 3 \begin{bmatrix} 6 & 10 & -8 \\ 6 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 12 \\ 3 & 9 & -12 \end{bmatrix} / 12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -7 & 7 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} / 12 + 2 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 12 \\ 4 & -4 & 12 \\ 4 & -4 & 12 \end{bmatrix} / 12 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 6 & -10 & 2 \\ -6 & 10 & -2 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} / 15 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 10 & -20 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} / 15 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 0 & 18 \\ 6 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -15 & 5 & -10 \\ 15 & 9 & 12 \end{bmatrix} / 30 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 0 & 10 & -20 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -14 & 28 \end{bmatrix} / 30 + 1 \begin{bmatrix} 30 & -10 & 20 \\ -30 & 10 & -20 \\ -15 & 5 & -10 \end{bmatrix} / 30 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 30 & 18 & 24 \\ 15 & 9 & 12 \end{bmatrix} / 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} / 4 + 1 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} / 4 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 6 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 2 \end{bmatrix} / 8 + 1 \begin{bmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -8 & 8 & -8 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} / 8 + 3 \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & 5 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 8 & -5 & -7 \\ -8 & 5 & 7 \\ -8 & 5 & 7 \end{bmatrix} / 20 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & 15 & -15 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} / 20 + 3 \begin{bmatrix} 12 & 0 & 12 \\ 8 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 + 2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -6 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} / 3 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 10 & -5 & 5 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ -10 & 5 & 10 \end{bmatrix} / 15 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -20 & 10 & -10 \\ 10 & -5 & 5 \end{bmatrix} / 15 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 18 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 4 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} / 4 - 1 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 4 + 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ -4 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 8 + 1 \begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -8 & -8 & 8 \end{bmatrix} / 8 + 3 \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 3 + 2 \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -6 & -6 & 3 \end{bmatrix} / 3 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 3 & 9 \\ -5 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 12 & -3 & -9 \\ -12 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 15 + 1 \begin{bmatrix} -5 & -5 & 5 \\ 10 & 10 & -10 \\ -10 & -10 & 10 \end{bmatrix} / 15 + 4 \begin{bmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 10 & 10 & 5 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} / 8 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 8 + 1 \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ -8 & -8 & 8 \end{bmatrix} / 8 + 3 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} / 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 3 + 2 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -6 & -6 & 3 \end{bmatrix} / 3 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 12 & -9 \\ -5 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & -12 & 9 \\ -3 & 12 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 15 + 1 \begin{bmatrix} 10 & 10 & -10 \\ -5 & -5 & 5 \\ -10 & -10 & 10 \end{bmatrix} / 15 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 4 \\ 10 & 10 & 5 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 7 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 8 & -7 & -5 \\ -8 & 7 & 5 \\ -8 & 7 & 5 \end{bmatrix} / 20 + 2 \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -15 & 15 \end{bmatrix} / 20 + 3 \begin{bmatrix} 12 & 12 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 5 & -10 & 10 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -9 & 9 & 0 \end{bmatrix} / 15 + 1 \begin{bmatrix} -5 & 10 & -10 \\ -5 & 10 & -10 \\ 5 & -10 & 10 \end{bmatrix} / 15 + 4 \begin{bmatrix} 8 & 2 & 10 \\ 8 & 2 & 10 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -5 & -10 & 10 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 12 & 0 & -12 \\ -9 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} / 15 + 1 \begin{bmatrix} -5 & -10 & 10 \\ 5 & 10 & -10 \\ -5 & -10 & 10 \end{bmatrix} / 15 + 4 \begin{bmatrix} 8 & 10 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 9 & 3 \\ 5 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} /15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 12 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 9 & 3 \end{bmatrix} /15 + 1 \begin{bmatrix} -5 & 5 & -5 \\ -10 & 10 & -10 \\ 10 & -10 & 10 \end{bmatrix} /15 + 4 \begin{bmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 10 & 5 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} /15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 8 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix} /12 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 0 & -9 & 9 \\ 0 & 15 & -15 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} /12 - 1 \begin{bmatrix} 4 & 4 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} /12 + 2 \begin{bmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 8 & 5 & -1 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix} /12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -10 & -5 & 5 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} /15 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 6 & -6 & -3 \\ -10 & 10 & 5 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} /15 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & -5 \\ -20 & -10 & 10 \end{bmatrix} /15 + 3 \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 6 \end{bmatrix} /15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -4 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} /8 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix} /8 + 1 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -8 & 8 & -8 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} /8 + 3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 8 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix} /8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} /4 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /4 + 1 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} /4 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} /4 \end{aligned}$$

1.6 3×3 singular matrices

The following 3×3 matrices have nonzero integer entries, are singular, have distinct integer eigenvalues, and are not symmetric:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 8 & -8 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & -12 & 12 \end{bmatrix} / 20 + 0 \begin{bmatrix} 15 & -15 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} / 20 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} / 12 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 9 & 0 & -9 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} / 12 + 1 \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} / 12 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -5 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & -8 & 8 \\ 0 & 12 & -12 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} / 20 + 0 \begin{bmatrix} 15 & 0 & -15 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix} / 20 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 5 & 8 & 7 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} / 12 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} / 12 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} / 12 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & -5 & 0 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & -8 \\ -12 & 0 & 12 \end{bmatrix} / 20 + 0 \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -15 & 15 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} / 20 + 4 \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -8 & 12 \\ -15 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -12 \\ -8 & -8 & 12 \end{bmatrix} / 20 + 0 \begin{bmatrix} 15 & -5 & -5 \\ -15 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 20 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -8 & 12 \\ -5 & 15 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 8 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 12 \end{bmatrix} / 20 + 0 \begin{bmatrix} 5 & -15 & 5 \\ -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 20 + 4 \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 5 & 5 & 5 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 3 & 3 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 12 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 3 \end{bmatrix} / 12 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} / 12 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 8 & 8 \\ 5 & -15 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 12 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 8 & 8 \end{bmatrix} / 20 + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 \\ 5 & -15 & 5 \end{bmatrix} / 20 + 4 \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 5 & 0 & -5 \\ -10 & 0 & 10 \end{bmatrix} / 15 + 0 \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -9 & 9 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} / 15 + 5 \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -12 & 8 \\ -15 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 12 & -8 \\ 8 & -12 & 8 \end{bmatrix} / 20 + 0 \begin{bmatrix} 15 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -15 & 5 & 5 \end{bmatrix} / 20 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 3 & 3 \\ -4 & -4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 12 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 12 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -8 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix} / 12 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 12 & -8 \\ -5 & -5 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 8 & -12 & 8 \\ -8 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 20 + 0 \begin{bmatrix} 5 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 15 \end{bmatrix} / 20 + 4 \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 8 & 8 \\ -5 & -5 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 12 & -8 & -8 \\ -12 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 20 + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & -15 \\ -5 & -5 & 15 \end{bmatrix} / 20 + 4 \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 \\ -12 & 12 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \end{bmatrix} / 20 + 0 \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 5 & 0 & -5 \\ -15 & 0 & 15 \end{bmatrix} / 20 + 4 \begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} / 15 + 0 \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 6 & 0 & -6 \\ -9 & 0 & 9 \end{bmatrix} / 15 + 5 \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \\ 8 & 5 & 7 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 12 & 0 & -12 \\ -8 & 0 & 8 \\ -8 & 0 & 8 \end{bmatrix} / 20 + 0 \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 15 & -15 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} / 20 + 4 \begin{bmatrix} 8 & 5 & 7 \\ 8 & 5 & 7 \\ 8 & 5 & 7 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -5 & 10 \\ -6 & 9 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 10 \end{bmatrix} / 15 + 0 \begin{bmatrix} 6 & -9 & 6 \\ -6 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 15 + 5 \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} / 20 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \end{bmatrix} / 20 + 0 \begin{bmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -15 & 15 \end{bmatrix} / 20 + 4 \begin{bmatrix} 8 & 7 & 5 \\ 8 & 7 & 5 \\ 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} / 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} / 15 + 0 \begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -9 & 9 \end{bmatrix} / 15 + 5 \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 10 & -5 \\ -6 & -6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 5 & -10 & 5 \\ -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 15 + 0 \begin{bmatrix} 6 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} / 15 + 5 \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 5 & 5 \\ -6 & -6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 10 & -5 & -5 \\ -10 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 15 + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & -9 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} / 15 + 5 \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 5 & 5 \\ 6 & -9 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 10 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & 5 & 5 \end{bmatrix} / 15 + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & -6 \\ 6 & -9 & 6 \end{bmatrix} / 15 + 5 \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} / 15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix} / 15 + 0 \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} / 15 + 5 \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} / 15 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} / 12 \\ = 0 \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} / 12 + 1 \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 \\ -4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} / 12 + 4 \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} / 12$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -9 & 3 \\ -8 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 12 \\ = 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & -3 \\ 3 & -9 & 3 \end{bmatrix} / 12 + 1 \begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} / 12 + 4 \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} / 12$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 9 \\ -8 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 12 \\ = 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -9 \\ -3 & -3 & 9 \end{bmatrix} / 12 + 1 \begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 12 + 4 \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} / 12$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 9 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 12 \\ = 0 \begin{bmatrix} 3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 9 \end{bmatrix} / 12 + 1 \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 12 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} / 12$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} / 12 \\ = 0 \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -9 & 9 \end{bmatrix} / 12 + 1 \begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} / 12 + 4 \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} / 12$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} / 20 \\ = 0 \begin{bmatrix} 0 & 8 & -8 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & -12 & 12 \end{bmatrix} / 20 + 1 \begin{bmatrix} 15 & -15 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} / 20 + 5 \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} / 20$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 9 & -3 \\ -4 & -4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 12 \\ = 0 \begin{bmatrix} 3 & -9 & 3 \\ -3 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 12 + 1 \begin{bmatrix} 4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix} / 12 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} / 12$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -5 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix} / 20 \\ = 0 \begin{bmatrix} 0 & -8 & 8 \\ 0 & 12 & -12 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} / 20 + 1 \begin{bmatrix} 15 & 0 & -15 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \end{bmatrix} / 20 + 5 \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 5 & 8 & 7 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix} / 20$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} / 12 \\ = 0 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -9 & 0 & 9 \end{bmatrix} / 12 + 1 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} / 12 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} / 12$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 5 & -5 & 0 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} / 20 \\ = 0 \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & -8 \\ -12 & 0 & 12 \end{bmatrix} / 20 + 1 \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -15 & 15 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} / 20 + 5 \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} / 20$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -8 & 12 \\ -15 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 20 \\ = 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -12 \\ -8 & -8 & 12 \end{bmatrix} / 20 + 1 \begin{bmatrix} 15 & -5 & -5 \\ -15 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 20 + 5 \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} / 20$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -8 & 12 \\ -5 & 15 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 20 \\ = 0 \begin{bmatrix} 8 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 12 \end{bmatrix} / 20 + 1 \begin{bmatrix} 5 & -15 & 5 \\ -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 20 + 5 \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 5 & 5 & 5 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} / 20$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -5 & 10 \\ -9 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} /15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & -10 \\ -5 & -5 & 10 \end{bmatrix} /15 + 0 \begin{bmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -9 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /15 + 5 \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} /15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 8 & 8 \\ 5 & -15 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} /20 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 12 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & 8 & 8 \end{bmatrix} /20 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 \\ 5 & -15 & 5 \end{bmatrix} /20 + 5 \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} /20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} /12 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -9 & 9 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} /12 + 1 \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ -8 & 0 & 8 \end{bmatrix} /12 + 4 \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} /12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -12 & 8 \\ -15 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} /20 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 12 & -8 \\ 8 & -12 & 8 \end{bmatrix} /20 + 1 \begin{bmatrix} 15 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -15 & 5 & 5 \end{bmatrix} /20 + 5 \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} /20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -10 & 5 \\ -9 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} /15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -5 \\ 5 & -10 & 5 \end{bmatrix} /15 + 0 \begin{bmatrix} 9 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 6 & 6 \end{bmatrix} /15 + 5 \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} /15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 12 & -8 \\ -5 & -5 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} /20 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 8 & -12 & 8 \\ -8 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /20 + 1 \begin{bmatrix} 5 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 15 \end{bmatrix} /20 + 5 \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} /20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 8 & 8 \\ -5 & -5 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} /20 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 12 & -8 & -8 \\ -12 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /20 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & -15 \\ -5 & -5 & 15 \end{bmatrix} /20 + 5 \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} /20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} /20 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 \\ -12 & 12 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \end{bmatrix} /20 + 1 \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 5 & 0 & -5 \\ -15 & 0 & 15 \end{bmatrix} /20 + 5 \begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} /20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ -3 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix} /15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} /15 + 0 \begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} /15 + 5 \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix} /15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \\ 8 & 5 & 7 \end{bmatrix} /20 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 12 & 0 & -12 \\ -8 & 0 & 8 \\ -8 & 0 & 8 \end{bmatrix} /20 + 1 \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 15 & -15 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} /20 + 5 \begin{bmatrix} 8 & 5 & 7 \\ 8 & 5 & 7 \\ 8 & 5 & 7 \end{bmatrix} /20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ -3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} /15 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} /15 + 0 \begin{bmatrix} 9 & 0 & -9 \\ -6 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} /15 + 5 \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} /15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} /20 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \end{bmatrix} /20 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -15 & 15 \end{bmatrix} /20 + 5 \begin{bmatrix} 8 & 7 & 5 \\ 8 & 7 & 5 \\ 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} /20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 3 + 2 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 10 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} / 10 + 0 \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 10 + 3 \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 2 + 1 \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 3 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 2 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} / 2 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} / 3 + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} / 2 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} / 2 + 1 \begin{bmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} / 2 + 2 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ -6 & 6 & 6 \end{bmatrix} / 6 + 0 \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -9 & 9 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} / 6 + 2 \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} / 3 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -6 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} / 6 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} / 6 + 2 \begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ -3 & -6 & 3 \end{bmatrix} / 6 + 3 \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -3 & 15 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} / 12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} -6 & -3 & 15 \\ 6 & 3 & -15 \\ -6 & -3 & 15 \end{bmatrix} / 12 + 0 \begin{bmatrix} 16 & 0 & -16 \\ -12 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} / 12 + 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} / 6 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} / 6 + 1 \begin{bmatrix} 6 & 6 & -6 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} / 6 + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -4 & -4 & 4 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} / 12 \\ &= 0 \begin{bmatrix} 0 & -12 & 12 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} / 12 + 1 \begin{bmatrix} 12 & 12 & -12 \\ -4 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix} / 12 + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} / 3 + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} / 12 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -12 & 12 & 12 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix} / 12 + 0 \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 12 & 0 & -12 \\ -8 & 0 & 8 \end{bmatrix} / 12 + 3 \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} / 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} / 3 + 1 \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -20 & 8 \\ -18 & 6 & 12 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} / 48 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 40 & -16 \\ 4 & -20 & 8 \end{bmatrix} / 48 + 0 \begin{bmatrix} 36 & -12 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18 & 6 & 12 \end{bmatrix} / 48 + 4 \begin{bmatrix} 12 & 12 & 24 \\ 8 & 8 & 16 \\ 14 & 14 & 28 \end{bmatrix} / 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} / 3 + 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} / 3 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} / 3 + 0 \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} / 3 + 1 \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} / 3 \end{aligned}$$

1.7 3×3 symmetric matrices

The following 3×3 matrices have nonzero integer entries, are nonsingular, have distinct integer eigenvalues, and are symmetric:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} / 6 + 1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} / 6 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 6 + 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} / 6 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 6 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} / 6 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} / 6 + 1 \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} / 6 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} / 6 + 1 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 6 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} / 6 + 1 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} / 6 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 + 6 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 5 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 5 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 + 6 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /6 + 7 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 + 7 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 3 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} /6 + 7 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -1 \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} /6 + 8 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 - 2 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 + 6 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 - 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \\ &= -2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} /6 \\ &= -4 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} /6 + 1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 + 4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \\ &= -3 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} /6 - 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} /6 + 6 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} /6 \end{aligned}$$